Cramer's Rule (Penerapan Matriks pada Matematika Ekonomi)

Hibban Syakib - 2501016108
Program Studi Ekonomi Pembangunan
Fakultas Ekonomi dan Bisnis
Universitas Mulawarman, Jl. Kuaro, Kota Samarinda

Setelah kita memahami operasi dasar pada matriks, kita akan mempelajari aturan *cramer's* (Cramer's Rule) yang menjadi fondasi bagi kita dalam memahami matriks dan sistem persamaan linier tingkat lanjut. Seperti yang kita dapat ketahui, pada tingkat matematika dasar (setaraf dengan matematika SMA) kita melihat perhitungan matriks dengan ordo yang terbatas, seperti matriks dengan ordo 2×2 dan 3×3, pada tahap tingkat lanjut, konsep ini dapat diperbesar (expanding) sampai dengan ordo n×n (angka tertentu).

Pada tugas kali ini, kita akan membahas *Cramer's Rule* atau disebut juga sebagai aturan cramer's, secara sederhana, aturan cramer's menyatakan bahwa kita dapat menemukan nilai X_i dengan mensubstitusi vektor konstan, menggantikan nilai dari kolom pertama sebuah matriks untuk mendapatkan determinan A_i, lalu membaginya dengan determinan dari matriks A, sehingga diberikan sebuah persamaan yakni:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Dalam memahami *Cramer's Rule* kita perlu mengetahui apa esensi dari mempelajari aturan ini? Mungkin anda bertanya, mengapa kita harus mempelajari ini dalam matematika ekonomi? Mari kita ambil contoh kasus pada sebuah model pasar sederhana:

$$\begin{cases} 10P_1 + 5P_2 = 25 \\ 9P_1 + 18P_2 = 36 \end{cases}$$

Diberikan 2 sistem persamaan yang merepresentasikan permintaan barang 1 (P_1) dan barang 2 (P_2), bagaimana cara kita agar mendapatkan harga keseimbangan antara P_1 dan P_2? Kita dapat mengubah model tersebut ke dalam bentuk matriks terlebih dahulu, kita dapat menyusunnya ke dalam format $Ax = B$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Kita dapat menghitung determinan A terlebih dahulu:

$$\det(A) = (10 \times 18) - (9 \times 5)$$

$$\det(A) = 180 - 45$$

$$det(A) = 135$$

Kita dapati hasil $\det(A) = 135$, karena $\det(A) \neq 0$, kita dapat menggunakan *Cramer's Rule* dalam mencari nilai P_1 & P_2 :

Untuk mencari nilai P_1, kita ganti kolom pertama matriks A dengan angka hasil (Vektor B)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 36 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = (25 \times 18) - (36 \times 5)$$

$$\det(A_1) = 450 - 180$$

$$det(A_1) = 270$$

Maka, nilai dari A_1 adalah:

$$P_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{270}{135} = 2$$

Setelah itu, kita akan mencari harga daripada P_2, dengan mengganti kolom kedua matriks A dengan hasil angka (Vektor B):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 9 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (10 \times 36) - (9 \times 25)$$

$$det(A_2) = 360 - 225$$

$$det(A_2) = 135$$

Maka, harga dari P_2 adalah:

$$P_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{135}{135} = 1$$

Kita dapati angka yang cantik, yakni harga P_2 adalah 1.

Setelah kita mendapati nilai daripada P_1 dan P_2, maka kita dapat menyimpulkan nilai yang sudah kita tadi cari dengan menggunakan aturan *Cramer's*.

Setelah kita melihat contoh yang lebih sederhana, mari kita bergeser ke dalam model ekonomi yang lebih besar, mari kita ulas sistem persamaan linear dengan contoh dimana kita memiliki model ekonomi 3-sektor yang direpresentasikan oleh matriks $Ax=B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0 \\ 0.2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mari kita melakukan pengerjaan dengan metode substitusi, kita dapat mengubah model dari matriks tersebut menjadi sistem persamaan linier biasa dengan keterangan:

$$\begin{cases} Y - C = 50 \\ 0.8Y - C = -20 \\ 0.2Y - T = 0 \end{cases}$$

Kita perlu mendapatkan nilai dari salah satu variabel dari model ekonomi tersebut yang dimana memakan cukup banyak waktu sehingga rawan akan kesalahan dalam perhitungan (*Human Error*) pada model tersebut. Mari kita gunakan aturan *Cramer's*:

Kita gunakan ekspansi *Laplace* untuk mencari determinan A, dapat kita gunakan baris pertama untuk mencari det(A) nya:

$$\det A = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det\ A = 1(1) + 1(-0.8) = 0.2$$

Kita dapat cari nilai determinan untuk Y dengan vektor hasil, perlu kita perhatikan mana kolom yang memiliki jumlah 0 yang cukup banyak sehingga dapat mempermudah hitungan kita:

$$\det A_Y = \begin{vmatrix} 50 & -1 & 0 \\ -20 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Gunakan ekspansi kolom ke-3:

$$det\ A_Y = -1\begin{vmatrix} 50 & -1 \\ -20 & -1 \end{vmatrix} = -1(-50 - 20)$$

$$det\ A_Y = 70$$

Kita beralih ke langkah akhir, dimana kita langsung membagi nilai determinan yang tadi telah kita dapat:

$$Y = \frac{det\ A_y}{det\ A} = \frac{70}{0.2} = 350$$

Hal yang sama juga dapat kita lakukan pada saat kita ingin mencari nilai dari variabel C dan T pada model ini, dengan memahami ekspansi *laplace* serta aturan *cramer's* kita dapat mengerjakan soal dengan jauh lebih efisien tanpa harus melakukan substitusi berulang yang rawan akan kesalahan.

Setelah kita melihat contoh dari aturan cramer's pada sistem persamaan linier yang membentuk matriks ordo 2×2 dan juga matriks 3×3 dalam model ekonomi, Aturan ini memang tidak secara konkret terlihat memudahkan pengerjaan kita pada model sederhana, namun dalam kondisi tertentu dimana sebuah model ekonomi yang jauh lebih kompleks dengan berbagai macam variabel yang ada, memungkinkan kita untuk menggunakan cara-cara yang efisien sehingga kita tidak perlu melakukan perhitungan ulang yang cukup kompleks dalam proses pengerjaannya.

Sumber:

[1] Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (4th ed.). McGraw-Hill.

[2] Jacques, I. (2018). *Mathematics for Economics and Business* (9th ed.). Pearson Education.

[3] Rosser, M. (2003). *Basic Mathematics for Economists* (2nd ed.). Routledge.